Abelian Higgs模型の分岐について

荒井, 義則

物性研究　59－1 (1992－10)

Abelian Higgs 模型の分岐について

亜細亜大アジア研　荒井義則

（1992年9月22日受理）

§1　序　　論

最近ゲージ場における分岐［1］－［6］やカオス［7］－［12］がいろいろと研究されているが，それらの研究の大部分はYang-Mills場に関するものであった。カオスについてはYang-Mills-Higgs系［11］－［12］や Abelian Higgs模型［11］についても調べられてきたが，分岐に関してはほとんど調べられていなかった。前の論文［13］では，Yang-Mills-Higgs系の分岐について調べたが，本論文では Abelian Higgs模型の分岐について考察する。

§2　Abelian Higgs 模型

本稿で扱うモデルのラグランジアン密度は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(D_{\mu}\phi)^{*}(D^{\mu}\phi)+c_2|\phi|^2-c_4|\phi|^4, \tag{1}$$

ただし，

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}, \tag{2}$$

$$D_{\mu}\phi=(\partial_{\mu}+ieA_{\mu})\phi, \tag{3}$$

である。

ここで，

$$A_0 = 0, \tag{4}$$

$$A_1 = A_2 = \frac{h(t)}{\sqrt{2}}, \tag{5}$$

$$\phi = \exp\,[i\omega\,(x+y)\,]\,q_2(t), \tag{6}$$

$$h(t) = q_1(t) - \frac{\sqrt{2}\,\omega}{e}, \tag{7}$$

とすると，場の方程式は

$$\ddot{q}_1 + e^2 q_1 q_2^2 = 0, \tag{8}$$

$$\ddot{q}_2 - 2c_2 q_2 + 4c_4 q_2^3 + e^2 q_1^2 q_2 = 0, \tag{9}$$

となる［11］。方程式(8)，(9)において，「・」は t に関する微分を表わす。

本稿では方程式(8)，(9)において，解の分岐が生じることを証明する。

§3　解の分岐

以下では，　$c_2 < 0$　の場合を考える。

$$\alpha = -c_2 > 0, \tag{10}$$

とおいて，

$$q_1(t) = \alpha k(t), \tag{11}$$

$$q_2(t) = \alpha l(t), \tag{12}$$

とおくと，方程式(8)，(9)は

$$\ddot{k}+e^2\alpha^2kl^2=0\ , \tag{13}$$

$$\ddot{l}+2\alpha l+4c_4\alpha^2l^3+e^2\alpha^2k^2l=0, \tag{14}$$

となる。

ここでは

$$0\leqq t\leqq T \qquad (T\text{は任意の正数}), \tag{15}$$

の範囲で考えることにする。このとき，αを分岐のパラメーターにとると，次の定理が成立する。

（定理）方程式(13)，(14)には

$$2\alpha=\frac{n^2\pi^2}{T^2} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{16}$$

のとき，自明解　$k=0$，$l=0$　から分岐し境界条件

$$k(0)=l(0)=k(T)=l(T)=0, \tag{17}$$

を満たす非自明解が存在する。2αが $n^2\pi^2/T^2$ に十分近いとき，この分岐解は

$$k=O(u^2)\ , \tag{18}$$

$$l=u\sin\frac{n\pi}{T}t+O(u^2)\ , \tag{19}$$

と表わされる。ここで，u は0に十分近い実数で，2αとは

$$2\alpha=\frac{n^2\pi^2}{T^2}+O(|u|)\ , \tag{20}$$

の関係がある。また，（2α，k，l）が（$n^2\pi^2/T^2$，0，0）に十分近いところでは方程式(13)，(14)の解は自明解　$k=0$，$l=0$　と(18)，(19)で表わされる解のみである。

（証明）方程式(13)，(14)の非線形部分，

$$\begin{pmatrix} e^2\alpha^2 kl^2 \\ 4c_4\alpha^2 l^3+e^2\alpha^2 k^2 l \end{pmatrix}$$

とこの非線形部分のkとlに関する一次導関数が，　$k=l=0$　のときに0になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については，境界条件(17)のもとで次の方程式を考えればよい。

$$\begin{pmatrix} \ddot{k} \\ \ddot{l}+2\alpha l \end{pmatrix}=0。\tag{21}$$

この方程式は　$2\alpha=n^2\pi^2/T^2$　のとき，次式で示される唯一の非自明解をもつ。

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\dfrac{n\pi}{T}t \end{pmatrix}。\tag{22}$$

すなわち，　$n^2\pi^2/T^2$　が単純固有値で，この固有値に(22)なるベクトルが属することがわかった。

以上の考察より，単純固有値からの分岐に関する定理（文献［14］，　188頁，定理5.1)によって，本定理は証明されたことになる。

参考文献

［1］R. Jackiw and P. Rossi : Phys. Rev. D21 (1980) 426.

［2］C. H. Oh : J. Math. Phys. 25(1984) 660.

［3］S. K. Paul and A. Khare : Phys. Lett. 138B(1984) 402.

［4］C. H. Oh, S. N. Chow and C. H. Lai : Phys. Rev. D30 (1984) 1334.

［5］U. Kursawe and E. Malec : J. Math. Phys. 26(1985) 2643.

[6] C.H.Oh and R.R.Parwani : J.Phys.A23 (1990) L871.(この論文のReferencesも参照).

[7] S.G.Matinyan, G.K.Savvidy and N.G.Ter-Arutunyan-Savvidy : Sov.Phys.JETP 53 (1981) 421.

[8] W.-H.Steeb, J.A.Louw and C.M.Villet : Phys.Rev. D33 (1986) 1174.

[9] S.G.Matinyan, E.B.Prokhorenko and G.K.Savvidi : JETP Lett.44(1986) 138.

[10] T.Kawabe and S.Ohta : Phys.Rev.D41(1990) 1983.

[11] C.Nagaraja Kumar and Avinash Khare : J.Phys.A22(1989)L849.

[12] T.Kawabe : Phys.Lett.B274(1992)399.

[13] Y,Arai : 物性研究55-6(1991)654.

[14] S.N.Chow and J.K.Hale : *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982).